

## **Attualità di Eugenio Beltrami**

Sono lieto e onorato di poter commemorare oggi Eugenio Beltrami, non solo perché egli fu uno dei maggiori matematici del XIX secolo, ma anche perché fu lungamente attivo presso la mia università, quella di Pavia, durante il periodo di maggior splendore della sua scuola matematica. Negli anni tra il 1850 e il 1890 la presenza, spesso contemporanea, di matematici quali Francesco Brioschi, Luigi Cremona, Felice Casorati, Eugenio Bertini e lo stesso Beltrami fece infatti di Pavia il più avanzato centro matematico italiano e il principale motore della rinascita delle scienze matematiche nell'Italia post-unitaria.

### *1. La vita in breve*

Eugenio Beltrami nacque a Cremona il 16 novembre 1835, da una famiglia di elevate tradizioni artistiche. Compì, ma non completò, gli studi universitari in matematica a Pavia, dove fu anche allievo del Collegio Ghislieri. Interrotti gli studi nel 1856 per ristrettezze economiche, trovò impiego come segretario del direttore delle ferrovie del Lombardo-Veneto, prima a Verona, poi a Milano. Qui riprese gli studi matematici, aiutato dal Cremona, su sollecitazione del quale fu nominato nel 1862 professore straordinario presso l'Università di Bologna. Nel 1864 si trasferì presso l'Università di Pisa come professore di Geodesia. Tornato a Bologna nel 1866, si trasferì a Roma nel 1873, poi, nel 1876, a Pavia. Qui rimase per lunghi anni, ed ebbe come colleghi Casorati, suo coetaneo e compagno di studi a Pavia, e in seguito anche Bertini. Dopo la morte di Casorati, nel 1891, si trasferì di nuovo presso l'Università di Roma. Nel 1898 fu nominato presidente dell'Accademia dei Lincei, e nel 1899 senatore. Morì a Roma il 18 febbraio 1900.

### *2. Prima e dopo Beltrami*

La formazione matematica di Beltrami avvenne in buona parte in modo autonomo. Tuttavia vari matematici ebbero sicuramente una notevole influenza su di lui, in primo luogo Francesco Brioschi (1824-1897, fondatore del Politecnico di Milano), che fu suo professore a Pavia, e Luigi Cremona (1830-1903), conosciuto a Pavia durante gli anni dell'università e poi ritrovato a Milano e in seguito a Bologna e a Roma. Ebbero un ruolo importante anche Felice Casorati (1835-1890) ed Enrico Betti (1823-1892), che lo volle a Pisa. Una forte influenza indiretta, sia attraverso Betti che attraverso gli scritti, ebbe anche Bernhard Riemann (1826-1866), cui principalmente si deve la svolta rivoluzionaria che ha portato al modo moderno di concepire la geometria. Beltrami fu uno dei primi continuatori, sia in Italia che fuori d'Italia, dell'opera di Riemann nell'ambito della geometria differenziale, e i suoi lavori dimostrano, fin dai primi anni della sua attività, una notevole dimestichezza con le idee di Riemann anche in campi diversi dalla geometria differenziale propriamente detta.

L'opera geometrica di Beltrami e le sue speculazioni sulla natura dello spazio si inseriscono

perfettamente, formandone un capitolo importante, in quella linea di pensiero che va da Gauss e Riemann al calcolo differenziale assoluto di Ricci e Levi-Civita, alla relatività generale e alla moderna geometria differenziale in generale.

### *3. La realizzazione concreta della geometria non euclidea*

L'opera che rese celebre Beltrami, e alla quale è tuttora soprattutto dovuta la sua fama, apparve nel 1868 sul «Giornale di Matematiche». Si tratta del lavoro «Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea», nel quale per la prima volta si dà una costruzione effettiva della geometria iperbolica di Bolyai e Lobachevsky. Questo lavoro è importante perché dimostra l'indipendenza del postulato delle parallele dagli altri postulati della geometria euclidea, e forse ancora di più perché dimostra la possibilità che il mondo fisico sia descrivibile con una geometria che a piccola scala è (essenzialmente) euclidea, ma è non euclidea a grande scala. Per descrivere la linea di pensiero che portò Beltrami alla sua scoperta è necessario parlare brevemente di geodetiche e carte geografiche. Nel piano il percorso più breve tra due punti è un tratto di retta. Analogamente, una geodetica su una superficie è una linea che realizza, fra due suoi qualsiasi punti, purché sufficientemente vicini, il tragitto (sulla superficie) più breve. Un altro modo, del tutto equivalente, di definire le geodetiche, è come le traiettorie descritte da un punto materiale che si muova, senza attrito e non soggetto a forze esterne, sulla superficie stessa. La figura seguente mostra due geodetiche tracciate su una superficie a forma di coppa svasata.

Come si è osservato, le geodetiche nel piano sono le rette. Le geodetiche su una sfera sono invece i cerchi massimi. Per un essere bidimensionale vivente su una superficie le «rette» sono le geodetiche. Una carta geografica è una rappresentazione piana di una parte della superficie terrestre o, più in generale, una rappresentazione piana di una parte di superficie. Nel caso della superficie terrestre e, in realtà, per la quasi totalità delle superficie, è impossibile trovare carte geografiche che siano del tutto fedeli, nel senso di riprodurre fedelmente (in proporzione) le distanze. Le carte usuali di solito preservano alcune caratteristiche, ad esempio gli angoli (carte conformi), o le aree (carte equivalenti), ma non altre. Una carta conforme di una parte della sfera, e precisamente la proiezione stereografica dal Polo Sud della regione compresa tra 45 gradi Sud a 90 gradi Nord., è schematicamente illustrata nella figura seguente.

In questa proiezione i cerchi massimi vengono trasformati in cerchi nel piano, tranne i meridiani che vengono trasformati in rette passanti per il punto corrispondente al polo Nord. È naturale chiedersi, data una superficie, se sia possibile trovarne una carta in cui le geodetiche appaiano come rette. Si può farlo, ad esempio, per la sfera, proiettando dal centro su un piano.

Questo è il risultato.

Beltrami risolse il problema nel 1865, mostrando che le sole superficie per cui la risposta è affermativa sono quelle di curvatura costante (come ad esempio le sfere, i piani, i cilindri). La curvatura di una superficie in un suo punto è un numero che misura appunto quanto essa sia, in quel punto, “intrinsecamente curva”. Ad esempio, un cilindro ha in questo senso curvatura nulla, perché un rotolo di carta può essere srotolato senza deformazione. Non definiremo in modo esatto la curvatura, ma ci limiteremo a tre esempi grafici per darne una idea intuitiva.

curvatura positiva

curvatura negativa

curvatura nulla

L’idea di Beltrami fu quella di costruire un modello di geometria non euclidea prendendo come spazio una superficie di curvatura costante negativa e come rette le sue geodetiche. Una seria difficoltà è che nello spazio ordinario non ci sono superficie di curvatura costante negativa le cui geodetiche si possano estendere indefinitamente, come fu rigorosamente dimostrato da Hilbert intorno al 1900. Vi sono però superficie di questo tipo nello spazio-tempo di Minkowski, e anche nel suo analogo tridimensionale; sono degli analoghi, in questa situazione, delle sfere dello spazio ordinario. Beltrami, pur esprimendosi in termini assai diversi, considerò in sostanza una di queste superficie e ne costruì una “carta geografica” in cui tutte le geodetiche vengono rappresentate come rette.

Il modello che ne risulta, schematicamente illustrato qui sopra, è un disco (bordo escluso) nel piano usuale, e le geodetiche vi appaiono come porzioni di rette. Per interpretare correttamente il modello è però necessario rendersi conto che: la misura delle distanze e degli angoli non è quella usuale; le distanze divengono tanto più grandi, e gli angoli più piccoli, rispetto a quelli usuali, quanto più ci si avvicina al bordo del disco. Le geodetiche sono indefinitamente estese e hanno lunghezza infinita. Nel modello tutti gli assiomi della geometria euclidea sono soddisfatti, tranne quello delle parallele che afferma: dati una retta e un punto ad essa esterno, l’esistenza di un’unica retta passante per il punto che non incontra la retta data. Nel modello queste rette sono infinite.

Nella figura qui sotto è rappresentata una porzione di superficie di curvatura costante negativa nello spazio ordinario, la pseudosfera.

Le figure che seguono riproducono invece un modello in carta di superficie di curvatura costante

negativa costruito da Beltrami intorno al 1869, la “cuffia di Beltrami”.

#### *4. Gli altri contributi di Beltrami alla scienza matematica*

La realizzazione concreta della geometria non-euclidea è solo uno dei molti risultati importanti dovuti a Beltrami. Tra questi si possono ricordare la scoperta dei differenziali di Beltrami, che sono tuttora uno strumento fondamentale nello studio delle applicazioni quasi-conformi e nello studio dei moduli delle superficie di Riemann, e quella dell'operatore di Laplace-Beltrami, che generalizza a varietà di dimensione qualunque e con metrica qualunque il classico operatore di Laplace. Questa scoperta di Beltrami è all'origine di numerosissimi sviluppi nel campo dello studio delle equazioni a derivate parziali su varietà, quali la teoria di Hodge, la teoria dell'indice, e così via. Si può affermare che l'operatore di Laplace-Beltrami è la chiave di volta per la comprensione delle interazioni tra analisi e topologia delle varietà.

Praticamente tutte le ricerche di Beltrami, incluse quelle sulla natura dello spazio, sono motivate da problemi fisici. Dagli anni '70 in poi egli si occupò quasi esclusivamente di fisica matematica; la maggior parte della sue oltre 100 pubblicazioni sono dedicate a problemi fisico-matematici. Si occupò tra l'altro di elettromagnetismo e in particolare della teoria di Maxwell, di teoria dell'elasticità, della propagazione del calore, di dinamica dei fluidi.

Maurizio Cornalba

Da: <http://www.itcbeltrami.it/artbeltrami/beltramitesto.htm> (consultata in rete il 5.4.2005).